

## Przykład do zadania 5.

Dla pręta cienkościennego o przekroju i schemacie statycznym pokazanymi na rysunku:

- wyznaczyć charakterystyki geometryczne:  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $K_s$ ,  $I_\omega$  oraz  $\bar{S}_y$ ,  $\bar{S}_z$ ,  $\bar{S}_\omega$  w punkcie **C** przekroju pręta cienkościennego,
- wyznaczyć wartości i sporządzić wykresy sił przekrojowych:  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_s$ ,  $M_\omega$  i  $B$ ,
- w przekroju a-a wyznaczyć wartości naprężeń normalnych  $\sigma_x$  i zilustrować je wykresami oraz naprężenie styczne  $\tau$  w punkcie **C**; naszkicować rozkład naprężenia  $\tau$  na grubości ścianki w punkcie **C**.

Dane:

dla przekroju

$$L_1 = 20 \text{ cm}$$

$$L_2 = 30 \text{ cm}$$

$$L_3 = 13 \text{ cm}$$

$$d = 10$$

B – punkt 2

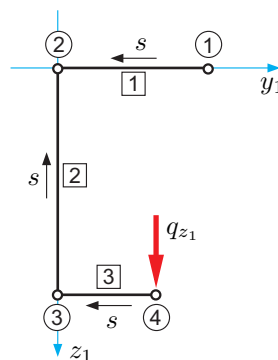
P<sub>0</sub> – punkt 3

C – odcinek 2 ( $\xi = 0,30$ )

$$P_{y_1} = 0 \quad P_{z_1} = 0$$

$$q_{y_1} = 0 \quad q_{z_1} = 3 \text{ kN/m}$$

obc – punkt 4 (obciążenie przyłożone w punkcie 4)



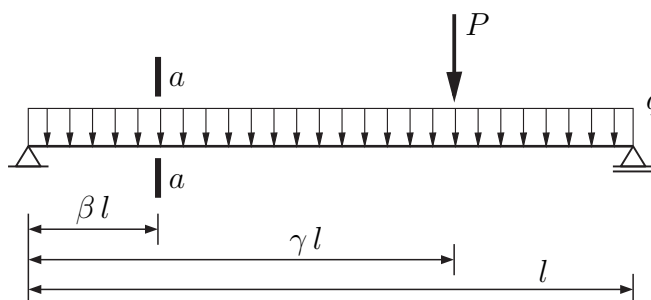
dla belki

schemat statyczny – 1

$$l = 5 \text{ m}$$

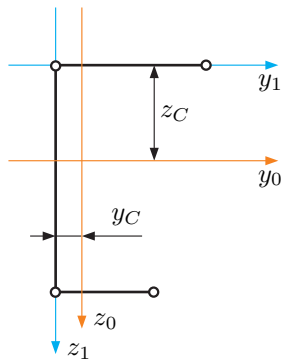
przekrój a-a –  $\beta = 0,35$

$$\frac{G}{E} = 0,4$$



# 1. Charakterystyki geometryczne

## 1.1. Środek ciężkości



$$\delta_1 = \frac{20}{d} = 2,0 \text{ cm} \quad \delta_2 = 3,0 \text{ cm} \quad \delta_3 = 1,3 \text{ cm}$$

$$A = 20 \cdot 2,0 + 30 \cdot 3,0 + 13 \cdot 1,3 = 146,9 \text{ cm}^2$$

$$S_{y_1} = 20 \cdot 2,0 \cdot 0 + 30 \cdot 3,0 \cdot \frac{30}{2} + 13 \cdot 1,3 \cdot 30 = 1\,857 \text{ cm}^3$$

$$S_{z_1} = 20 \cdot 2,0 \cdot \frac{20}{2} + 30 \cdot 3,0 \cdot 0 + 13 \cdot 1,3 \cdot \frac{13}{2} = 509,9 \text{ cm}^3$$

$$y_C = \frac{509,9}{146,9} = 3,47 \text{ cm}$$

$$z_C = \frac{1\,857}{146,9} = 12,64 \text{ cm}$$

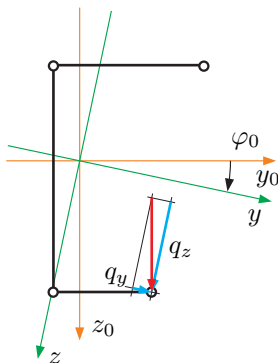
## 1.2. Centralne momenty bezwładności

$$I_{y_0} = 20 \cdot 2,0 \cdot (-12,64)^2 + \frac{3,0 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 3,0 \cdot \left(\frac{30}{2} - 12,64\right)^2 + 13 \cdot 1,3 \cdot (30 - 12,64)^2 = 18\,735 \text{ cm}^4$$

$$I_{z_0} = \frac{2,0 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 2,0 \cdot \left(\frac{20}{2} - 3,47\right)^2 + 30 \cdot 3,0 \cdot (-3,47)^2 + \frac{1,3 \cdot 13^3}{12} + 13 \cdot 1,3 \cdot \left(\frac{13}{2} - 3,47\right)^2 = 4\,516 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0 z_0} = 20 \cdot 2,0 \cdot (-12,64) \cdot \left(\frac{20}{2} - 3,47\right) + 30 \cdot 3,0 \cdot \left(\frac{30}{2} - 12,64\right) \cdot (-3,47) + 13 \cdot 1,3 \cdot (30 - 12,64) \cdot \left(\frac{13}{2} - 3,47\right) = -3\,150 \text{ cm}^4$$

## 1.3. Ośie główne



$$\text{tg}(2\varphi_0) = -\frac{2 \cdot (-3\,150)}{18\,735 - 4\,516} = 0,443$$

$$\varphi_0 = 11,95^\circ$$

## 1.4. Wykresy współrzędnych

$$y^{(1)} = (20 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = 13,55 \text{ cm}$$

$$y^{(2)} = (0 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = -6,01 \text{ cm}$$

$$y^{(3)} = (0 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = 0,20 \text{ cm}$$

$$y^{(4)} = (13 - 3,47) \cdot \cos(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \sin(11,95^\circ) = 12,92 \text{ cm}$$

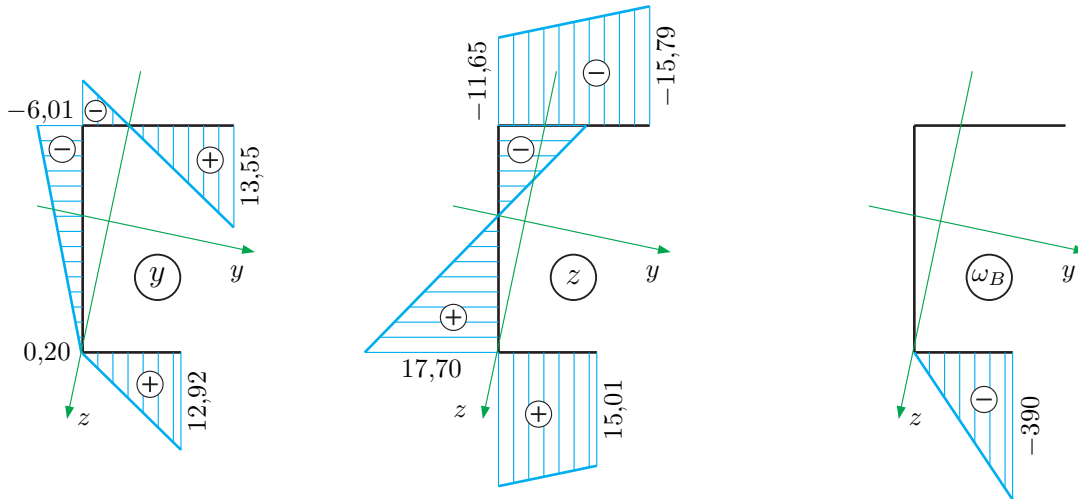
$$z^{(1)} = -(20 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = -15,79 \text{ cm}$$

$$z^{(2)} = -(0 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (0 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = -11,65 \text{ cm}$$

$$z^{(3)} = -(0 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = 17,70 \text{ cm}$$

$$z^{(4)} = -(13 - 3,47) \cdot \sin(11,95^\circ) + (30 - 12,64) \cdot \cos(11,95^\circ) = 15,01 \text{ cm}$$

$$\omega^{(1)} = 0 \quad \omega^{(2)} = 0 \quad \omega^{(3)} = 0 \quad \omega^{(4)} = -30 \cdot 13 = -390 \text{ cm}^2$$



## 1.5. Momenty bezwładności

$$I_y = \frac{20}{6} \left[ 2 \cdot ((-15,79)^2 + (-11,65)^2) + 2 \cdot (-15,79) \cdot (-11,65) \right] \cdot 2,0 +$$

$$+ \frac{30}{6} \left[ 2 \cdot ((-11,65)^2 + (17,70)^2) + 2 \cdot (-11,65) \cdot (17,70) \right] \cdot 3,0 +$$

$$+ \frac{13}{6} \left[ 2 \cdot ((17,70)^2 + (15,01)^2) + 2 \cdot (17,70) \cdot (15,01) \right] \cdot 1,3 = 19\,402 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{20}{6} \left[ 2 \cdot ((13,55)^2 + (-6,01)^2) + 2 \cdot (13,55) \cdot (-6,01) \right] \cdot 2,0 +$$

$$+ \frac{30}{6} \left[ 2 \cdot ((-6,01)^2 + (0,20)^2) + 2 \cdot (-6,01) \cdot (0,20) \right] \cdot 3,0 +$$

$$+ \frac{13}{6} \left[ 2 \cdot ((0,20)^2 + (12,92)^2) + 2 \cdot (0,20) \cdot (12,92) \right] \cdot 1,3 = 3\,849 \text{ cm}^4$$

$$K_s = \frac{1}{3} \sum_i l_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} (20 \cdot 2,0^3 + 30 \cdot 3,0^3 + 13 \cdot 1,3^3) = 332,9 \text{ cm}^4$$

$$I_{\omega_{By}} = \frac{13}{6} \left[ 2 \cdot 12,92 \cdot (-390) + 0,20 \cdot (-390) \right] \cdot 1,3 = -28\,594 \text{ cm}^5$$

$$I_{\omega_{Bz}} = \frac{13}{6} \left[ 2 \cdot 15,01 \cdot (-390) + 17,70 \cdot (-390) \right] \cdot 1,3 = -52\,422 \text{ cm}^5$$

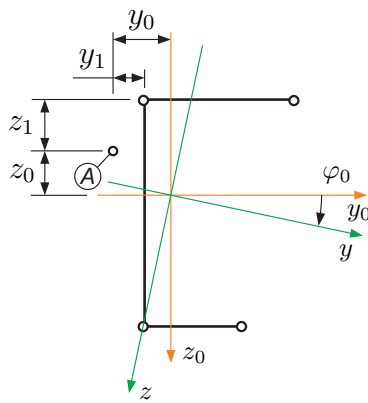
## 1.6. Główny biegun wycinkowy

$$y_A = -6,01 + \frac{-52\,422}{19\,402} = -6,01 - 2,70 = -8,71 \text{ cm}$$

$$z_A = -11,65 - \frac{-28\,594}{3\,849} = -11,65 + 7,43 = -4,22 \text{ cm}$$

## 1.7. Główna współrzędna wycinkowa

### 1.7.1. Współrzędne głównego bieguna wycinkowego w układzie osi środkowych



$$\begin{aligned} y_0 &= y_A \cdot \cos(-\varphi) + z_A \cdot \sin(-\varphi) = \\ &= -8,71 \cdot \cos(11,95^\circ) + (-4,22) \cdot \sin(-11,95^\circ) = \\ &= -7,651 \text{ cm} \end{aligned}$$

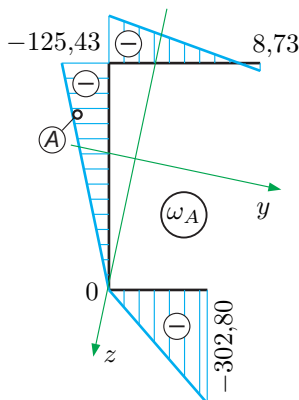
$$\begin{aligned} z_0 &= -y_A \cdot \sin(-\varphi) + z_A \cdot \cos(-\varphi) = \\ &= -(-8,71) \cdot \sin(11,95^\circ) + (-4,22) \cdot \cos(-11,95^\circ) = \\ &= -5,932 \text{ cm} \end{aligned}$$

### 1.7.2. Współrzędne głównego bieguna wycinkowego w układzie osi początkowych

$$y_1 = y_0 + y_C = -7,651 + 3,47 = -4,181 \text{ cm}$$

$$z_1 = z_0 + z_C = -5,932 + 12,64 = 6,708 \text{ cm}$$

### 1.7.3. Współrzędna $\omega_A$



$$\omega_A^{(3)} = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_A^{(2)} &= \omega_A^{(3)} - |y_1| \cdot L_2 = 0 - |-4,18| \cdot 30 = \\ &= -125,43 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

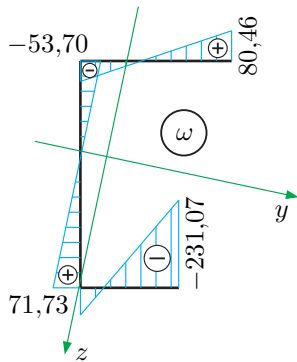
$$\begin{aligned} \omega_A^{(1)} &= \omega_A^{(2)} + z_1 \cdot L_1 = -125,43 + 6,708 \cdot 20 = \\ &= -125,43 + 134,16 = 8,73 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_A^{(4)} &= \omega_A^{(3)} - (L_2 - z_1) \cdot L_3 = 0 - (30 - 6,708) \cdot 13 = \\ &= -302,80 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

### 1.7.4. Moment statyczny współrzędnej $\omega_A$

$$\begin{aligned} S_{\omega_A} &= \frac{8,73 - 125,43}{2} \cdot 20 \cdot 2,0 + \frac{-125,43 + 0}{2} \cdot 30 \cdot 3,0 + \frac{0 - 302,80}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 = \\ &= -10\,537 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

### 1.7.5. Współrzędna $\omega$



$$\omega_A(P_{gł}) = \frac{S_{\omega_A}}{A} = \frac{-10\,537}{146,9} = -71,73 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(i)} = \omega_A^{(i)} - \omega_A(P_{gł})$$

$$\omega^{(1)} = 8,73 + 71,73 = 80,46 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(2)} = -125,43 + 71,73 = -53,70 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(3)} = 0 + 71,73 = 71,73 \text{ cm}^2$$

$$\omega^{(4)} = -302,80 + 71,73 = -231,07 \text{ cm}^2$$

### 1.8. Główny wycinkowy moment bezwładności

$$\begin{aligned} I_{\omega} = & \frac{20}{6} \left[ 2 \cdot (80,46^2 + (-53,70)^2) + 2 \cdot 80,46 \cdot (-53,70) \right] \cdot 2,0 + \\ & + \frac{30}{6} \left[ 2 \cdot ((-53,70)^2 + 71,73^2) + 2 \cdot (-53,70) \cdot 71,73 \right] \cdot 3,0 + \\ & + \frac{13}{6} \left[ 2 \cdot (71,73^2 + (-231,07)^2) + 2 \cdot 71,73 \cdot (-231,07) \right] \cdot 1,3 = 428\,855 \text{ cm}^6 \end{aligned}$$

### 1.9. Współczynnik giętno-skrętny

$$\alpha = \sqrt{\frac{GK_s}{EI_{\omega}}} = \sqrt{0,4 \cdot \frac{332,9}{428\,855}} = 0,01761 \frac{1}{\text{cm}} = 1,761 \frac{1}{\text{m}}$$

### 1.10. Momenty statyczne odciętej części przekroju w punkcie C

$$y_{(\text{odcinek } 2; \xi=0,3)} = 0,20 + 0,3 \cdot (-6,01 - 0,20) = -1,66 \text{ cm}$$

$$z_{(\text{odcinek } 2; \xi=0,3)} = 17,70 + 0,3 \cdot (-11,65 - 17,70) = 8,90 \text{ cm}$$

$$\omega_{(\text{odcinek } 2; \xi=0,3)} = 71,73 + 0,3 \cdot (-53,70 - 71,73) = 34,10 \text{ cm}^2$$

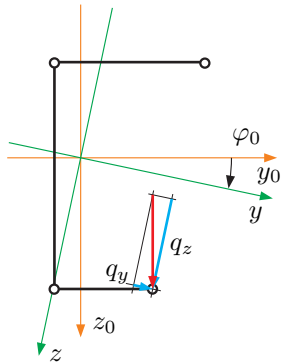
$$\bar{S}_y(C) = \frac{15,01 + 17,70}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 + \frac{17,70 + 8,90}{2} \cdot 30 \cdot 0,3 \cdot 3,0 = 635,50 \text{ cm}^3$$

$$\bar{S}_z(C) = \frac{12,92 + 0,20}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 + \frac{0,20 - 1,66}{2} \cdot 30 \cdot 0,3 \cdot 3,0 = 91,15 \text{ cm}^3$$

$$\bar{S}_{\omega}(C) = \frac{-231,07 + 71,73}{2} \cdot 13 \cdot 1,3 + \frac{71,73 + 34,10}{2} \cdot 30 \cdot 0,3 \cdot 3,0 = 82,28 \text{ cm}^4$$

## 2. Siły wewnętrzne

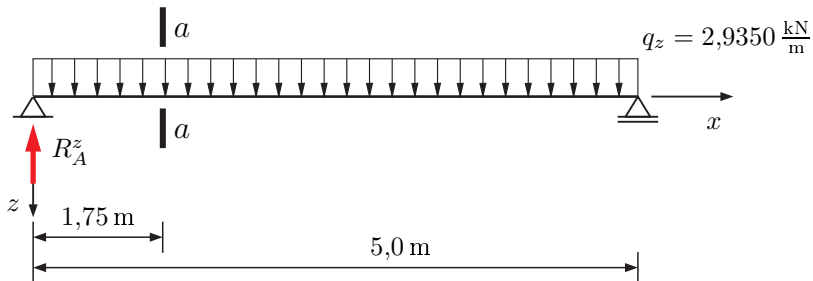
### 2.1. Pochodzące od zginania: siły tnące i momenty zginające



$$q_y = q \cdot \sin \varphi_0 = 3 \cdot \sin(11,95^\circ) = 3 \cdot 0,2071 = 0,6212 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$q_z = q \cdot \cos \varphi_0 = 3 \cdot \cos(11,95^\circ) = 3 \cdot 0,9783 = 2,9350 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

#### 2.1.1. Siły wewnętrzne w płaszczyźnie $OXZ$

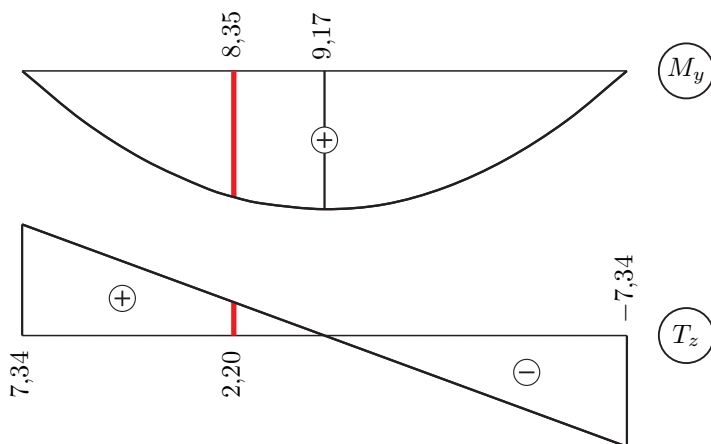


$$R_A^z = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q_z = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 2,9350 = 7,3375 \text{ kN}$$

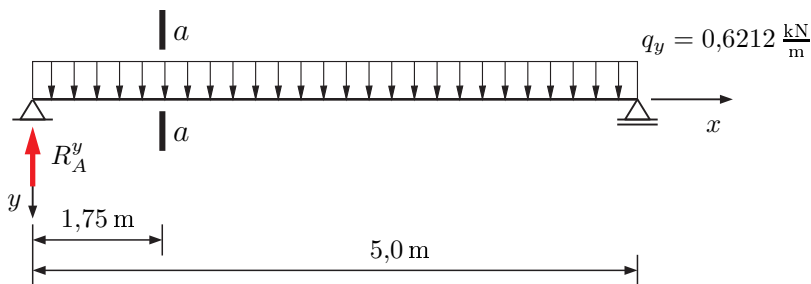
$$M_y \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q_z \cdot l^2}{8} = \frac{2,9350 \cdot 5^2}{8} = 9,17 \text{ kNm}$$

$$M_y(\beta l) = R_A^z \cdot \beta l - q_z \cdot \frac{(\beta l)^2}{2} = 7,3375 \cdot 1,75 - 2,9350 \cdot \frac{(1,75)^2}{2} = 8,35 \text{ kNm}$$

$$T_z(\beta l) = R_A^z - q_z \cdot (\beta l) = 7,3375 - 2,9350 \cdot 1,75 = 2,20 \text{ kN}$$



### 2.1.2. Siły wewnętrzne w płaszczyźnie $OXY$

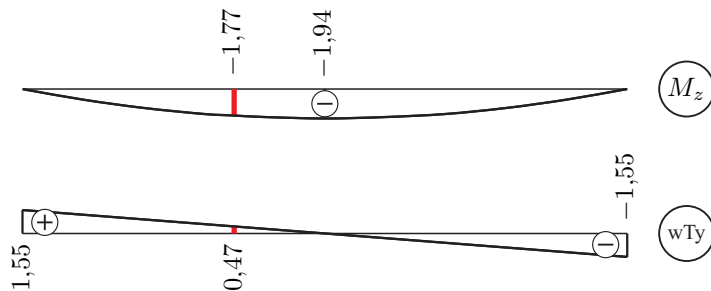


$$R_A^y = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q_y = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 0,6212 = 1,553 \text{ kN}$$

$$M_z \left( \frac{l}{2} \right) = -\frac{q_y \cdot l^2}{8} = -\frac{0,6212 \cdot 5^2}{8} = -1,94 \text{ kNm}$$

$$M_z(\beta l) = -R_A^y \cdot \beta l + q_y \cdot \frac{(\beta l)^2}{2} = -1,553 \cdot 1,75 + 0,6212 \cdot \frac{(1,75)^2}{2} = -1,77 \text{ kNm}$$

$$T_y(\beta l) = R_A^y - q_y \cdot (\beta l) = 1,553 - 0,6212 \cdot 1,75 = 0,47 \text{ kN}$$



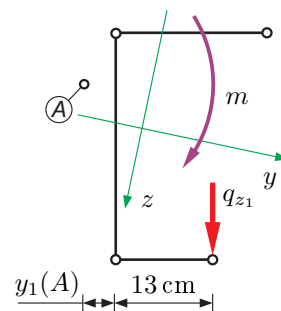
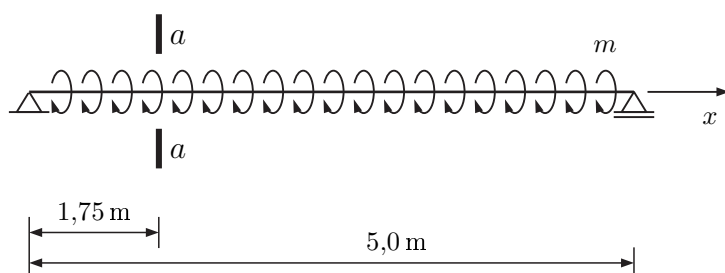
### 2.2. Siły pochodzące od skręcania pręta cienkościennego: $B$ , $M_\omega$ , $M_s$

Analizowana belka jest skręcana rozłożonym momentem skręcającym  $m$  wynikającym z faktu, iż płaszczyzna obciążenia ( $q_{z1}$ ) nie przechodzi przez główny biegunek wycinkowy  $A$ .

Moment kręci zgodnie z ruchem wskazówek zegara, zatem zwrot jego wektora jest zgodny z osią  $x \rightarrow$  moment dodatni.

$$m = q_{z1} \cdot (L_3 + |y_1(A)|) = 3 \cdot (0,13 + 0,04181) = 0,515 \text{ kNm/m}$$

Otrzymujemy belkę skręcaną:



W niektórych projektach występuje obciążenie siłą skupioną. Siła ta działając na ramieniu względem bieguna  $A$  daje nam moment skupiony  $M$  skręcający pręt cienkościenne. Wartość momentu skupionego wyznaczamy analogicznie do momentu  $m$  mnożąc siłę  $P$  przez odległość bieguna  $A$  od linii działania tej siły.

W wyniku rozwiązania równania różniczkowego skręcanego pręta cienkościennego:

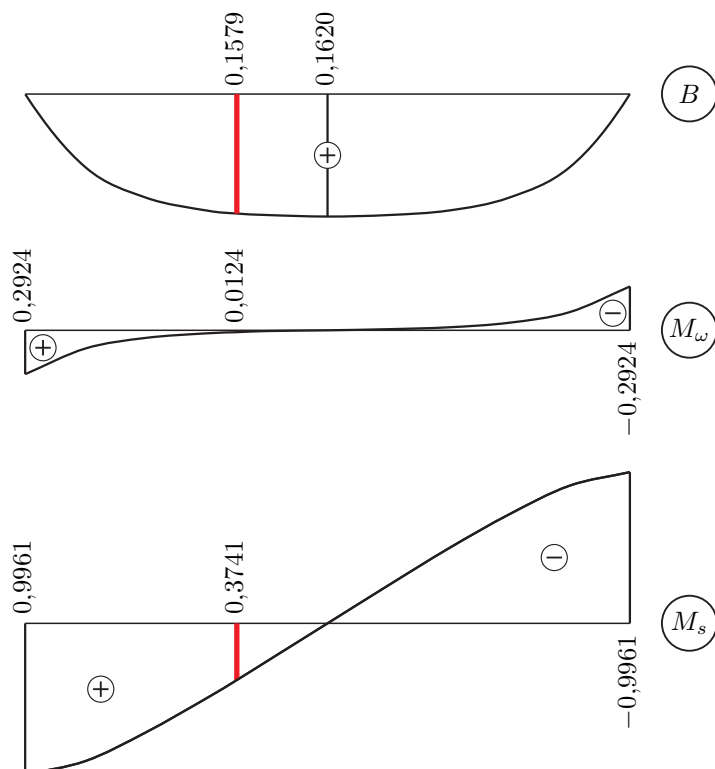
$$\Theta^{IV} - \alpha^2 \Theta^{II} = \frac{m}{E I_\omega}$$

otrzymujemy wzory na siły wewnętrzne w skręcanym pręcie cienkościnnym:

$$M_S = \frac{m}{\alpha} \left[ \alpha \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right) - \frac{\sinh \left( \alpha \left( \frac{l}{2} - x \right) \right)}{\cosh \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$B = \frac{m}{\alpha^2} \left[ 1 - \frac{\cosh \left( \alpha \left( \frac{l}{2} - x \right) \right)}{\cosh \frac{\alpha l}{2}} \right]$$

$$M_\omega = \frac{m}{\alpha} \cdot \frac{\sinh \left( \alpha \left( \frac{l}{2} - x \right) \right)}{\cosh \frac{\alpha l}{2}}$$



### 3. Naprężenia

#### 3.1. Naprężenia normalne w przekroju a-a

$$\sigma_x^{(i)} = \underbrace{\frac{M_y}{I_y} \cdot z^{(i)} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y^{(i)}}_{\sigma_M} + \underbrace{\frac{B}{I_\omega} \cdot \omega^{(i)}}_{\sigma_\omega}$$

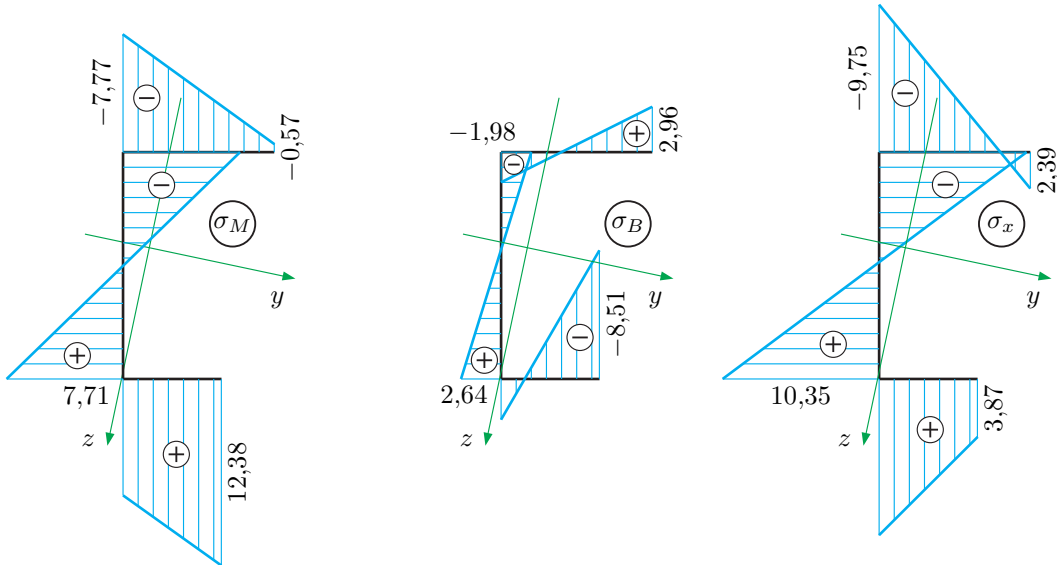
$$\sigma_x^{(1)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{19\,402 \cdot 10^{-8}} \cdot (-15,79) \cdot 10^{-2} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3}}{3\,849 \cdot 10^{-8}} \cdot (13,55) \cdot 10^{-2} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3}}{428\,855 \cdot 10^{-12}} \cdot (80,46) \cdot 10^{-4} = -0,57 + 2,96 = 2,39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(2)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{19\,402 \cdot 10^{-8}} \cdot (-11,65) \cdot 10^{-2} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3}}{3\,849 \cdot 10^{-8}} \cdot (-6,01) \cdot 10^{-2} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3}}{428\,855 \cdot 10^{-12}} \cdot (-53,70) \cdot 10^{-4} = -7,77 - 1,98 = -9,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(3)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{19\,402 \cdot 10^{-8}} \cdot (17,70) \cdot 10^{-2} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3}}{3\,849 \cdot 10^{-8}} \cdot (0,20) \cdot 10^{-2} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3}}{428\,855 \cdot 10^{-12}} \cdot (71,73) \cdot 10^{-4} = 7,71 + 2,64 = 10,35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x^{(4)} = \frac{8,35 \cdot 10^{-3}}{19\,401 \cdot 10^{-8}} \cdot (15,01) \cdot 10^{-2} - \frac{-1,77 \cdot 10^{-3}}{3\,849 \cdot 10^{-8}} \cdot (12,92) \cdot 10^{-2} + \frac{0,1579 \cdot 10^{-3}}{428\,854 \cdot 10^{-12}} \cdot (-231,07) \cdot 10^{-4} = 12,38 - 8,51 = 3,87 \text{ MPa}$$

| punkt | $y^{(i)}$ | $z^{(i)}$ | $\omega^{(i)}$ | $\sigma_M^{(i)}$ | $\sigma_\omega^{(i)}$ | $\sigma_x^{(i)}$ |
|-------|-----------|-----------|----------------|------------------|-----------------------|------------------|
| (1)   | 13,55     | -15,79    | 80,46          | -0,57            | 2,96                  | 2,39             |
| (2)   | -6,01     | -11,65    | -53,70         | -7,77            | -1,98                 | -9,75            |
| (3)   | 0,20      | 17,70     | 71,73          | 7,71             | 2,64                  | 10,35            |
| (4)   | 12,92     | 15,01     | -231,07        | 12,38            | -8,51                 | 3,87             |



### 3.2. Naprężenia styczne w punkcie C

$$\begin{aligned}\tau_S &= \frac{M_S}{K_S} \cdot \delta = \frac{0,3741}{332,9 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,03 = 3\,371 \text{ kPa} = 3,37 \text{ MPa} \\ \tau_{M+\omega} &= - \left[ \frac{T_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot \delta} + \frac{T_y \cdot \bar{S}_z}{I_z \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot \bar{S}_\omega}{I_\omega \cdot \delta} \right] = \\ &= - \left[ \frac{2,20 \cdot 635,50 \cdot 10^{-6}}{19\,402 \cdot 10^{-8} \cdot 0,03} + \frac{0,47 \cdot 91,15 \cdot 10^{-6}}{3\,849 \cdot 10^{-8} \cdot 0,03} + \frac{0,0124 \cdot 82,28 \cdot 10^{-8}}{428\,855 \cdot 10^{-12} \cdot 0,03} \right] = \\ &= - [284,1 + 34,7 + 0,8] = -319,6 \text{ kPa} = -0,32 \text{ MPa}\end{aligned}$$

