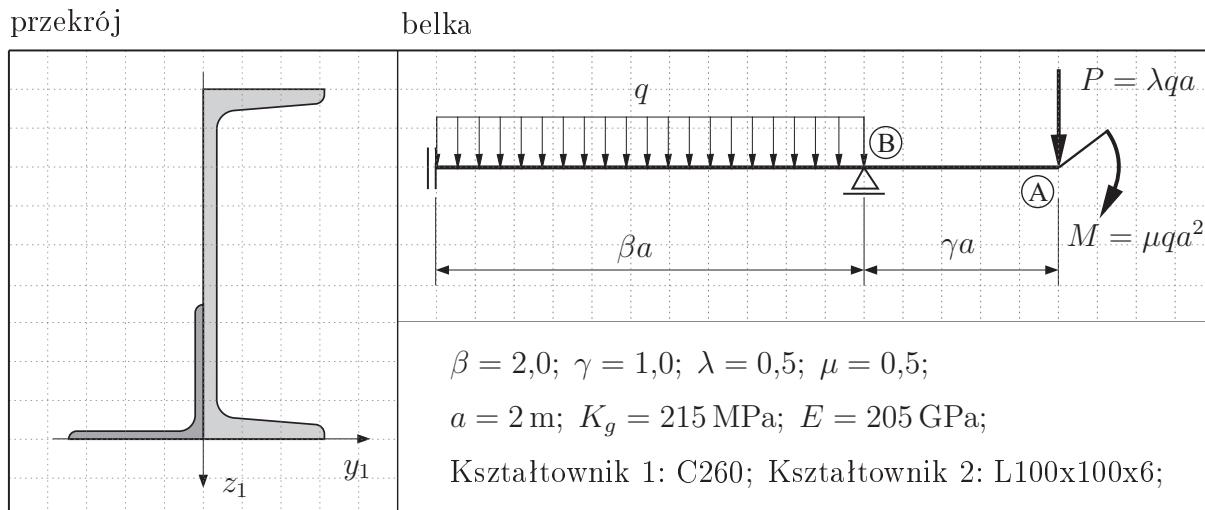


Przykład do zadania 1.

Wyznaczyć dopuszczalną wartość obciążenia q z warunku wytrzymałościowego dla stalowej belki podanej na rysunku.



Dane dla kształtowników:

C260: $A = 48,3 \text{ cm}^2$

$e_y = 2,36 \text{ cm}$

$I_y^C = 4820 \text{ cm}^4$

$I_z^C = 317 \text{ cm}^4$

L100x100x6: $A = 11,8 \text{ cm}^2$

$e_y = e_z = 2,64 \text{ cm}$

$I_y^L = I_z^L = 111 \text{ cm}^4$

$I_{yz} = 65 \text{ cm}^4$

1. Charakterystyki geometryczne

1.1. Środek ciężkości

Współrzędne środków ciężkości kształtowników w początkowym układzie współrzędnych $y_1 z_1$

$y_1^C = 2,36 \text{ cm}$

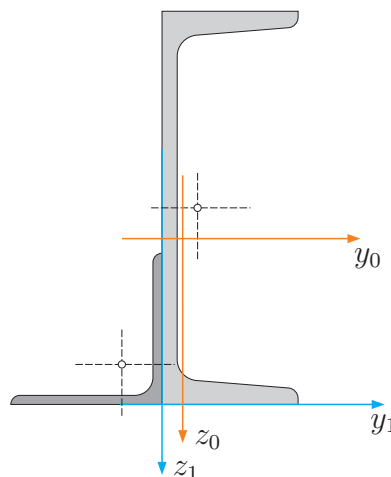
$z_1^C = -13,0 \text{ cm}$

$z_1^L = -2,64 \text{ cm}$

$y_1^L = -2,64 \text{ cm}$

$$y_c = \frac{A^L \cdot y_1^L + A^C \cdot y_1^C}{A^L + A^C} = \frac{11,8 \cdot (-2,64) + 48,3 \cdot 2,36}{11,8 + 48,3} = 1,3783 \text{ cm}$$

$$z_c = \frac{A^L \cdot z_1^L + A^C \cdot z_1^C}{A^L + A^C} = \frac{11,8 \cdot (-2,64) + 48,3 \cdot (-13,0)}{11,8 + 48,3} = -10,9659 \text{ cm}$$



1.2. Centralne momenty bezwładności

Współrzędne środków ciężkości kształtowników w centralnym układzie współrzędnych $y_0 z_0$

$$y_0^C = y_1^C - y_c = 2,36 - 1,3783 = 0,9817 \text{ cm}$$

$$z_0^C = z_1^C - z_c = -13,0 - (-10,9659) = -2,0341 \text{ cm}$$

$$y_0^L = y_1^L - y_c = -2,64 - 1,3783 = -4,0183 \text{ cm}$$

$$z_0^L = z_1^L - z_c = -2,64 - (-10,9659) = 8,3259 \text{ cm}$$

$$I_{y_0} = 4820 + 48,3 \cdot (-2,03)^2 + 111 + 11,8 \cdot (8,33)^2 = 5948,83 \text{ cm}^4$$

$$I_{z_0} = 317 + 48,3 \cdot (0,99)^2 + 111 + 11,8 \cdot (-4,02)^2 = 665,08 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_0 z_0} = 0 + 48,3 \cdot (-2,03) \cdot (0,98) + (-65) + 11,8 \cdot (8,33) \cdot (-4,02) = -556,23 \text{ cm}^4$$

1.3. Główne centralne momenty bezwładności

$$\tan(2\varphi_0) = -\frac{2 \cdot I_{y_0 z_0}}{I_{y_0} - I_{z_0}} = -\frac{2 \cdot (-556)}{5949 - 665} = 0,21054$$

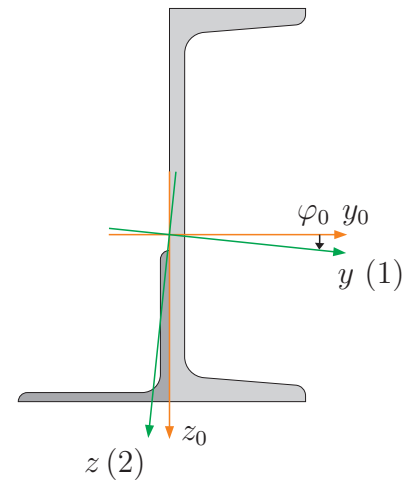
$$2\varphi_0 = \arctan(0,21054) = 11,89^\circ$$

$$\varphi_0 = 5,9448^\circ = 5^\circ 56' 41''$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(I_{y_0} + I_{z_0}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{y_0} - I_{z_0})^2 + 4 \cdot I_{y_0 z_0}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(5948,83 + 665,08) + \frac{1}{2}\sqrt{(5948,83 - 665,08)^2 + 4 \cdot (-556,23)^2} = \\ &= 3306,955 + 2699,795 = 6006,75 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

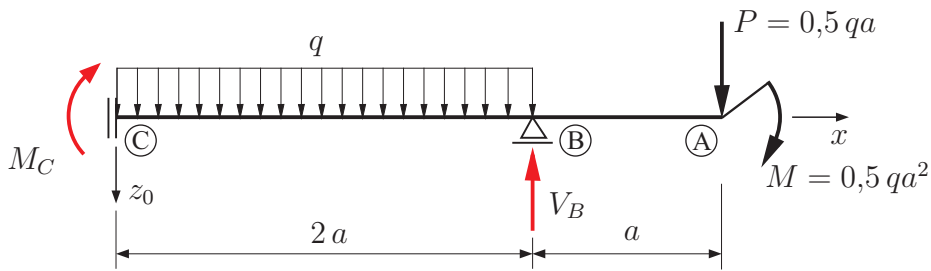
$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}(I_{y_0} + I_{z_0}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{y_0} - I_{z_0})^2 + 4 \cdot I_{y_0 z_0}^2} = \\ &= 3306,955 - 2699,795 = 607,19 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$I_{y_0} > I_{z_0} \implies \begin{aligned} I_y &= I_1 \\ I_z &= I_2 \end{aligned}$$



2. Dopuszczalne obciążenie

2.1. Moment zginający



Warunki równowagi

$$\Sigma z = 0$$

$$q \cdot 2a - V_B + 0,5 qa = 0$$

$$V_B = 2qa + 0,5 qa = 2,5 qa$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$M_C - q \cdot 2a \cdot a + 0,5 qa \cdot a + 0,5 qa^2 = 0$$

$$M_C = 2qa^2 - 0,5 qa^2 - 0,5 qa^2 = qa^2$$

Wyznaczenie momentów zginających

Przedział B-A

$$M_A = -M = -0,5 qa^2$$

$$M_B = -M - P \cdot a = -0,5 qa^2 - 0,5 qa^2 = -qa^2$$

Przedział C-B $x \in (0; 2a)$

$$M_{y_0}(x) = M_C - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = qa^2 - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M_{y_0}(0) = qa^2$$

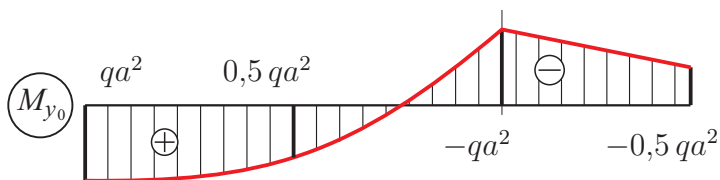
$$M_{y_0}(2a) = qa^2 - q \frac{(2a)^2}{2} = -qa^2$$

$$M_{y_0}(a) = qa^2 - q \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} qa^2$$

Ekstremum

$$\frac{dM_{y_0}}{dx} = 0 \Rightarrow -qx = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow M_{y_0}(0) = qa^2$$



Wersja I

$$M_{y_0}^{\max} = q \cdot a^2$$

$$M_y = M_{y_0} \cdot \cos \varphi_0$$

$$M_z = -M_{y_0} \cdot \sin \varphi_0$$

Wersja II

$$M_{y_0}^{\max} = q \cdot a^2$$

$$M_y^{\max} = M_{y_0}^{\max} \cdot \cos \varphi_0 = 0,9946 q a^2$$

$$M_z^{\max} = -M_{y_0}^{\max} \cdot \sin \varphi_0 = -0,1036 q a^2$$

2.2. Oś obojętna $\sigma_x = 0$

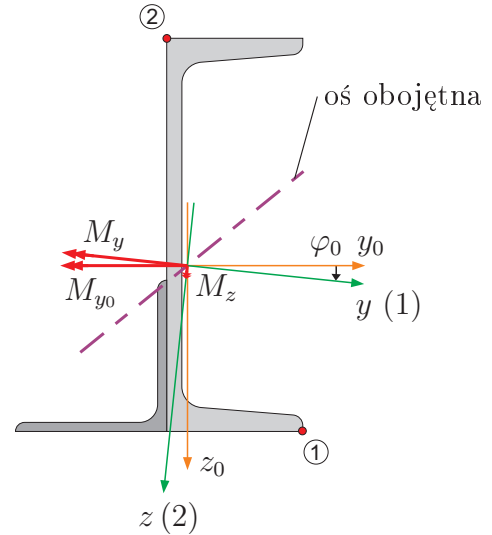
Wersja I

$$z = y \cdot \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{J_y}{J_z} = \frac{-M_{y_0} \cdot \sin \varphi_0}{M_{y_0} \cdot \cos \varphi_0} \cdot \frac{J_y}{J_z} \cdot y$$

$$= -\tan \varphi_0 \cdot \frac{J_y}{J_z} \cdot y$$

$$= -\tan(5,9448^\circ) \cdot \frac{6006,75}{607,19} \cdot y$$

$$z = -1,030 \cdot y$$



Wersja II

$$z = y \cdot \frac{M_z^{\max}}{M_y^{\max}} \cdot \frac{J_y}{J_z} = \frac{-0,1036 q a^2}{0,9946 q a^2} \cdot \frac{6006,75}{607,19} \cdot y = -1,030 \cdot y$$

2.3. Naprężenia normalne

2.3.1. Dla punktu ①

$$y_1^{\text{I}} = 9 \text{ cm} \quad y_0^{\text{I}} = y_1^{\text{I}} - y_C = 9 - 1,3783 = 7,6217 \text{ cm}$$

$$z_1^{\text{I}} = 0 \text{ cm} \quad z_0^{\text{I}} = z_1^{\text{I}} - z_C = 0 - (-10,9659) = 10,9659 \text{ cm}$$

$$y^{\text{I}} = y_0^{\text{I}} \cdot \cos \varphi_0 + z_0^{\text{I}} \cdot \sin \varphi_0 = 7,6217 \cdot 0,9946 + 10,9659 \cdot 0,1036 = 8,7165 \text{ cm}$$

$$z^{\text{I}} = -y_0^{\text{I}} \cdot \sin \varphi_0 + z_0^{\text{I}} \cdot \cos \varphi_0 = -7,6217 \cdot 0,1036 + 10,9659 \cdot 0,9946 = 10,1175 \text{ cm}$$

Wersja I

$$\begin{aligned}\sigma_x^{\textcircled{1}} &= \frac{M_y}{J_y} \cdot z^{\textcircled{1}} - \frac{M_z}{J_z} \cdot y^{\textcircled{1}} = M_{y_0} \cdot \left[\frac{\cos \varphi_0}{J_y} \cdot z + \frac{\sin \varphi_0}{J_z} \cdot y \right] \\ &= M_{y_0} \cdot \left[\frac{0,9946}{6006,75 \cdot 10^{-8}} \cdot 10,1175 \cdot 10^{-2} + \frac{0,1036}{607,17 \cdot 10^{-8}} \cdot 8,7165 \cdot 10^{-2} \right] \\ &= M_{y_0} \cdot 3,162 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1}{m^3} \right]\end{aligned}$$

Wersja II

$$\begin{aligned}\sigma_x^{\textcircled{1}} &= \frac{M_y^{\max}}{J_y} \cdot z^{\textcircled{1}} - \frac{M_z^{\max}}{J_z} \cdot y^{\textcircled{1}} = \\ &= \frac{0,9946 q a^2}{6006,75 \cdot 10^{-8}} \cdot 10,1175 \cdot 10^{-2} - \frac{-0,1036 q a^2}{607,17 \cdot 10^{-8}} \cdot 8,7165 \cdot 10^{-2} = \\ &= (1673,57 + 1487,22) q a^2 \cdot \left[\frac{1}{m^3} \right] = 3161 q a^2 \cdot \left[\frac{1}{m^3} \right] = 12643 q \cdot \left[\frac{1}{m} \right]\end{aligned}$$

2.3.2. Dla punktu ②

$$\begin{aligned}y_1^{\textcircled{2}} &= 0 \text{ cm} & y_0^{\textcircled{2}} &= 0 - 1,3783 = -1,3783 \text{ cm} \\ z_1^{\textcircled{2}} &= -26 \text{ cm} & z_0^{\textcircled{2}} &= -26 - (-10,9659) = -15,0341 \text{ cm} \\ y^{\textcircled{2}} &= -1,3783 \cdot 0,9946 - 15,0341 \cdot 0,1036 = -2,9280 \text{ cm} \\ z^{\textcircled{2}} &= 1,3783 \cdot 0,1036 - 15,0341 \cdot 0,9946 = -14,8105 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^{\textcircled{2}} &= M_{y_0} \cdot \left[\frac{0,9946}{6006,75 \cdot 10^{-8}} \cdot (-15,0341 \cdot 10^{-2}) + \frac{0,1036}{607,17 \cdot 10^{-8}} \cdot (-1,3783 \cdot 10^{-2}) \right] \\ &= M_{y_0} \cdot (-2,952 \cdot 10^3) \cdot \left[\frac{1}{m^3} \right]\end{aligned}$$

2.3.3. Sprawdzenie wyznaczenia naprężeń

Odległości punktów od osi obojętnej (Rys. 1)

$$d(1) = 13,3 \text{ cm}$$

$$d(2) = 12,4 \text{ cm}$$

$$\frac{d(1)}{d(2)} = 1,072$$

Iloraz naprężeń

$$\frac{|\sigma_x^{\textcircled{1}}|}{|\sigma_x^{\textcircled{2}}|} = \frac{3,162 \cdot 10^3 \cdot M_{y_0}}{2,952 \cdot 10^3 \cdot M_{y_0}} = 1,071$$

2.4. Wyznaczenie q_{dop}

Ze względu na to, że w omawianym przypadku wytrzymałość obliczeniowa na ściskanie i rozciąganie jest taka sama, to do wyznaczenia q posłuży nam naprężenie σ będące maksymalną wartością z, w tym przypadku, dwuelementowego zbioru w skład którego wchodzi maksymalne naprężenie oraz wartość bezwzględna z naprężeń minimalnych.

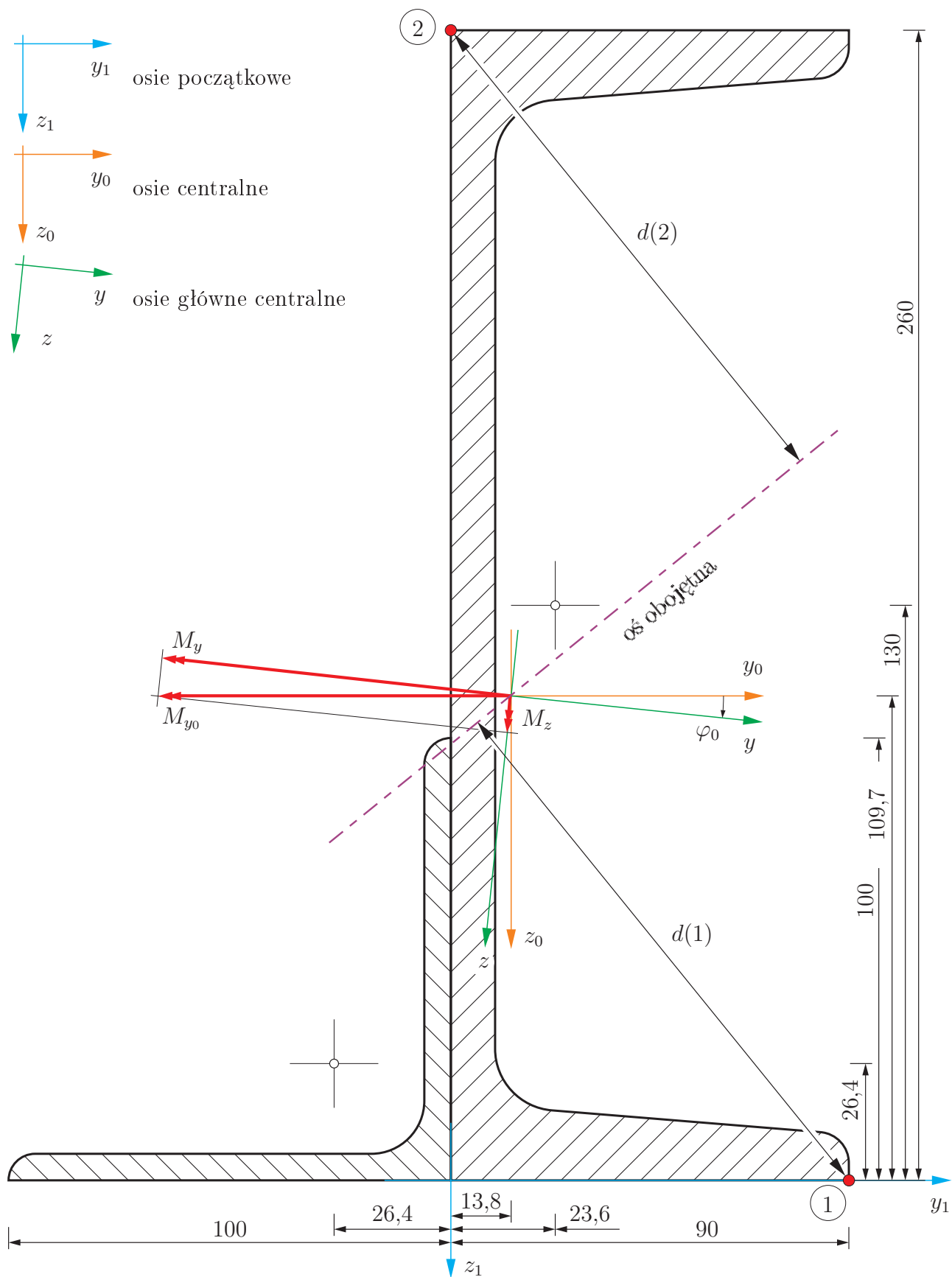
$$\sigma = \max \{ \sigma_x^{(1)}, |\sigma_x^{(2)}| \}$$

Naprężenia o największej wartości występują w punkcie ①

$$\sigma_x \leqslant K_g$$

$$\sigma_x = M_{y0} \cdot 3,162 \cdot 10^3 = qa^2 \cdot 3,162 \cdot 10^3 \leqslant K_g$$

$$q_{\text{dop}} = \frac{215 \cdot 10^6}{2^2 \cdot 3,162 \cdot 10^3} = 17,0 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 17,0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$



Rysunek 1 (skala 1:1)

Wersja II

